

11. Harmonikus rezgőmozgás

Alapfeladatok

Kinematika

1.

Egy rezgő test legnagyobb sebessége 5 m/s , legnagyobb gyorsulása 15 m/s^2 . Mekkora a frekvenciája?

2.

Egy rezgő test legnagyobb sebessége 1 m/s , legnagyobb gyorsulása 10 m/s^2 . Mekkora az amplitúdó?

3.

Egy test harmonikus rezgőmozgást végez. A két szélső helyzet távolsága 12 cm , a rezgésszám 6000 1/min .

- a) Mekkora a test maximális sebessége? (**$37,7 \text{ m/s}$**)
- b) Mekkora a test maximális gyorsulása? (**$23\,700 \text{ m/s}^2$**)
- c) Mennyi idő alatt tesz meg a test 12 cm utat? (**$0,005 \text{ s}$**)

4.

Harmonikus rezgőmozgást végző test kitérés-idő függvénye $y = 0,1 \cdot \sin(6,28t)$, ahol az adatok SI mértékegységekben értendők. Határozd meg:

- a rezgő test maximális sebességét és maximális gyorsulását,
- a test sebességét a $t=0,167 \text{ s}$ időpillanatban!

5.

Harmonikus rezgőmozgást végző test kitérés-idő függvénye $y = 0,2 \cdot \sin(6,28t)$, ahol az adatok SI mértékegységekben értendők. Határozd meg:

- a rezgő test maximális sebességét és maximális gyorsulását,
- a test gyorsulását a $t=0,0833 \text{ s}$ időpillanatban!

6.

Egy pontszerű test egyidejűleg két harmonikus rezgést végez egymásra merőleges irányban, azonos amplitúdóval és frekvenciával, de 90° -os fáziseltéréssel. Milyen pályán mozog a test?

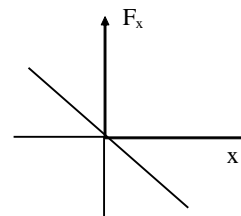
- A) egyenes B) kör C) parabola

Dinamika, periódusidő, rezgési energia

7.

Egy test az x-tengely mentén mozog. A rá ható eredő erő az ábrán látható módon függ a test helyzetétől. Milyen mozgást végez a test?

- A) Egyenletesen változó mozgást
- B) Csillapodó rezgőmozgást,
- C) Harmonikus rezgőmozgást.



8.

Függőlegesen felfüggesztett rugó végére egy testet erősítünk, majd rezgésbe hozzuk. Első esetben a rezgés amplitúdója 1 cm , a második esetben pedig 2 cm . Melyik esetben nagyobb a rezgés periódusideje?

- A) a második esetben B) az első esetben C) a periódusidők egyenlők

9.

Adva van egy egyik végénél felfüggesztett rugó, egy stopperóra és egy ismert tömegű test. Hogyan tudná ezekkel az eszközökkel megmérni egy ismeretlen tömegű test tömegét?

Az úrhajósok tömegének ellenőrzésére az űrállomáson nem alkalmasak a földön használatos mérlegek. Képzelden el egy 20 kg tömegű fotelt, amely rugalmas felfüggesztése révén 2 Hz-es frekvenciával rezegni képes. Miután egy úrhajós a fotelbe ül, a rezgésszám 1 Hz-re csökken. Mennyi az úrhajós tömege?

10.

Az 1 kg tömegű test harmonikus rezgőmozgást végez. A rezgőmozgás amplitúdója 3 cm, rezgésideje 1,2 s.

- Mekkora a test legnagyobb gyorsulása?
- Mekkora a test legnagyobb mozgási energiája?

11.

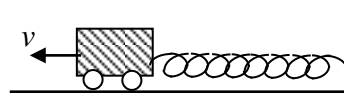
Vízszintes asztalon fekvő rugó egyik végét rögzítjük, a másik végére egy testet erősítünk. A rugóállandó mind nyújtásra, mind összenyomásra 30 N/m. A testet abban a helyzetben tartjuk, amikor a rugó összenyomódása 0,1 m. Az elengedett test rezgésideje 0,314 s.

A mozgás súrlódásmentes.

- Mennyi a test gyorsulásának a legnagyobb értéke?
- Mennyi a test tömege?

12.

Vízszintes talajon mozgó kiskocsi egy falhoz rögzített rugó végén $\omega = 20 \text{ 1/s}$ körfrekvenciájú harmonikus rezgést végez. Amikor a rugó megnyúlása $y = 0,1 \text{ m}$, akkor a kocsi $v = 2 \text{ m/s}$ sebességgel mozog. Határozzuk meg a rezgés amplitúdóját, és a kocsi maximális sebességét!



13.

Egy test harmonikus rezgőmozgást végez. Mekkora a mozgás amplitúdója, ha 10 cm-es kitérés esetén a test mozgási energiája egyenlő a rugalmas energiájával?

14.

Egy test harmonikus rezgőmozgást végez 10 cm-es amplitúdóval. Mekkora kitérés esetén lesz a test mozgási energiája egyenlő a rugalmas energiájával?

15.

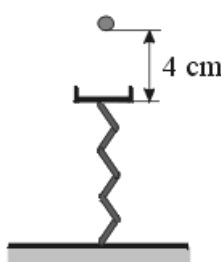
Egy test harmonikus rezgőmozgást végez. Mekkora a mozgás amplitúdója, ha 5 cm-es kitérés esetén a test mozgási energiája kétszerese a rugalmas energiájának?

Függőleges felfüggesztés, alátámasztás

16.

Csavarrugó végén 1 kg tömegű test függ, ami a rugó hosszát 10 cm-rel növeli meg. Ha a rugót kissé meghúzzuk és elengedjük, rezgőmozgás jön létre. Hány teljes rezgés történik 1 perc alatt?

17.



Az ábra szerinti függőleges tengelyű 1 N/cm rugóállandójú spirálrugóra 4 cm magasságból 0,1 kg tömegű golyót ejtünk.

- Mekkora lesz a rugó maximális összenyomódása? (Az energiavesztésektől tekintünk el! Tételezzük fel, hogy a golyó a rugó súlytalannak tekinthető tányérjába beleragad.) (4 cm)
- Mekkora lesz az előálló függőleges rezgés amplitúdója és frekvenciája? (3 cm, 5,05 Hz)

„Zörgés, megcsúszás”

18.

Egy rajztábla a ráhelyezett radírral együtt mozog. A vízszintes helyzetű tábla vízszintes síkban 8 cm-es amplitúdójú harmonikus rezgőmozgást végez. Ha a periódusidő legalább 0,5 s, a radír nem csúszik meg.

a) Mekkora a súrlódási együttható? **(1,26)**

b) A függőleges helyzetű rajztáblát legalább mekkora vízszintes gyorsulással kell mozgatni, hogy a radír ne csússzék le? **(7,94 m/s²)**

19.

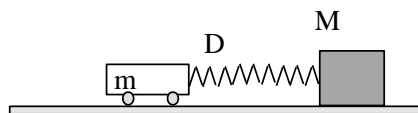
Vízszintes könyvre egy pénzérmét helyezünk, és a könyvet függőleges irányban 10 cm-es amplitúdóval harmonikus rezgésbe hozzuk. Legfeljebb mekkora lehet a rezgés amplitúdója, ha azt akarjuk, hogy a pénzérme se váljon el a könyvtől?

Haladó szintű feladatok

Dinamika, periódusidő, rezgési energia

20.

Egy $M = 4$ kg tömegű nehezékhez egy $D = 400$ N/m rugóállandójú rugó közbeiktatásával egy $m = 1$ kg tömegű kiskocsi kapcsolódik. A kiskocsit 5 cm-rel kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből, majd elengedjük.



a) Legalább mekkora a tapadási súrlódási tényező a nehezék és az alátámasztás között, ha azt tapasztaljuk, hogy a nehezék a kiskocsi mozgása közben mozdulatlan marad?

b) Mekkora lesz a kiskocsi legnagyobb sebessége?

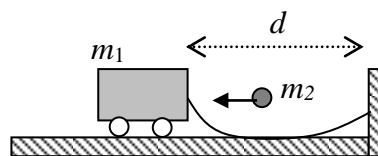
c) Az indulás után mennyi idővel éri el először a kocsi a maximális sebességét?

(A kocsi mozgását súrlódás nem fékezi.)

21.

Egy $m_1 = 3,99$ kg tömegű álló kiskocsit egy laza, $L = 40$ cm hosszúságú vékony gumiszál kapcsol a falhoz. A kocsi jobb oldali vége és a fal között $d = 30$ cm a távolság.

A kocsi egy $m_2 = 0,01$ kg tömegű, $v_0 = 400$ m/s sebességű lövedék csapódik vízszintes irányból, és a kocsi lefékeződve azzal együtt mozog tovább.



a) Mekkora sebességgel indul a kocsi a lövedék becsapódása után?

b) Mekkora lesz a gumiszál legnagyobb megnyúlása, ha a szál rugószerűen viselkedik, és a rugóállandó $D = 400$ N/m?

c) A lövedék becsapódásától számítva mennyi idő múlva lesz a gumi megnyúlása maximális?

22.

Egy 10 N/m rugóállandójú, vízszintes helyzetű rugó egyik vége a falhoz, másik vége pedig egy 0,4 kg tömegű testhez van erősítve. A test vízszintes felületen súrlódás nélkül harmonikus rezgőmozgást végez. Sebessége az egyensúlyi helyzettől 10 cm-re 0,7 m/s.

a) Mekkora a test sebessége az egyensúlyi helyzettől 5 cm távolságban? **(0,82 m/s)**

b) Mekkora itt a rugó teljesítménye? **(0,41 W)**

c) Mekkora a rugó legnagyobb teljesítménye a rezgés során? **(0,74 W)**

23.

Egy L hosszúságú vonalzót a végén lévő lyukon átvezetett vízszintes szög körül, mint tengely körül kis szögkitérésű lengésbe hozunk. A mértékegységek elemzésével döntsük el, hogy melyik formula adhatja helyesen a vonalzó lengésidejét az alábbiak közül!

A) $T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}}$

B) $T = 2\pi \sqrt{\frac{3g}{2L}}$

C) $T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{L}}$

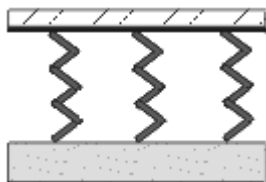
Függőleges felfüggesztés, alátámasztás

24.

Függőlegesen felfüggesztett rugó szabad végére testet függesztünk. A test a rugót az egyensúlyi helyzetig 10 cm-rel nyújtja meg. Ha a testet kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből harmonikus rezgőmozgás jön létre. Mekkora a rezgőmozgás körfrekvenciája?

- A) 5 1/s B) 10 1/s C) Nem meghatározható.

25.



Egy 2 kg tömegű testet három rugóra függesztünk fel. Feszítetlen állapotban mindhárom rugó egyforma hosszú; a középen lévő rugó rugóállandója 8 N/cm, a két szimmetrikusan elhelyezett rugó egyforma, mindkettő rugóállandója egyaránt 5 N/cm.

a) Mekkora a rugók közös hosszváltozása (megnyúlása) a test súlya alatt? **(1,11 cm)**

A testet a fenti egyensúlyi helyzetéből kitérítjük.

b) Mekkora az így előálló rezgés frekvenciája? (A test függőlegesen, önmagával párhuzamosan mozog) **(4,75 Hz)**

26.

Az egyik végén rögzített, 200 N/m rugóállandójú, függőleges tengelyű rugó alsó szabad végén két, egyenként 1 kg tömegű test függ. Mekkora a rugó megnyúlása, ha a testek egyensúlyban vannak? Mekkora amplitúdójú és rezgésidejű rezgés jön létre, ha az egyik test leesik a rugóról?

27.

Egy felfüggesztett rugó alsó végére három, egyenként 0,1 kg tömegű golyót rögzítünk. Az egyensúlyban lévő golyók 30 cm-rel nyújtják meg a rugót. Valamilyen okból az egyik golyó rögzítése megszűnik, a golyó leesik. Mekkora amplitúdójú és frekvenciájú rezgést végez a másik két golyó?

28.

Egy rugóra felfüggesztett, 1 kg tömegű test harmonikus rezgőmozgást végez. A rezgés amplitúdója 12 cm, a frekvencia 1 Hz. Mekkora a rugalmas energia legkisebb és legnagyobb értéke?

29.

Felfüggesztett, elhanyagolható tömegű csavarrugó szabad végén 1,2 kg tömegű test nyugalomban van. Ebben a helyzetben a rugó megnyúlása 0,1 m.

a) Mekkora a rugóban felhalmozott rugalmas energia?

b) Mekkora sebességgel lökhetjük meg függőlegesen lefelé a rugón függő, nyugalomban lévő testet, hogy a mozgás folyamán a rugóerő ne legyen 3 N-nál nagyobb?

A nehézségi gyorsulás értékét vegyük 10 m/s²-nek.

30.

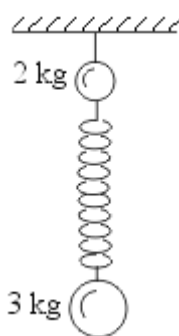
Egy 50 N/m rugóállandójú függőleges rugó tetején egy 0,5 kg tömegű tányér van.

a) Mennyi a rugó összenyomódása? **(0,1 m)**

A tányér felett 1 m magasban egy 1 kg tömegű homokzsák van. Ha a homokzsákot a tányérra ejtjük, a homokzsák a tányérra érkezéstől kezdve együtt mozog lefelé a tányérral.

b) Mekkora lesz a legnagyobb közös sebességük? **(3,2 m/s)**

31.



Egy fonálon függő 2 kg tömegű testhez egy rugót kötöttük, majd ehhez egy másik, 3 kg tömegű testet erősítettünk az ábra szerint. A rugó tömege elhanyagolható, rugóállandója húzásra és nyomásra is 1200 N/m ; $g=10 \text{ m/s}^2$.

A 3 kg tömegű testet függőlegesen meghúzzuk, majd elengedjük.

a) Milyen frekvenciájú és mekkora amplitúdójú rezgést végezhet ez a test úgy, hogy a fonál közben végig feszes maradjon? (**3,138 Hz**)

Tegyük fel most azt, hogy a rendszer az egyensúlyi helyzetben nyugalomban van:

b) Ha ekkor elvágjuk a fonalat, mekkora gyorsulással indulnak el a testek? (**0 , 25 m/s^2**)

Kényszerrezgés, rezonancia

32.

Egy autópálya útfelületét 20 m hosszúságú betonlapok egymáshoz illesztésével alakították ki. Az elhasználódás következtében a lapok illesztése nem tökéletes. Az autópályán haladva azt vesszük észre, hogy egy bizonyos sebességnél a gépkocsiban felfüggesztett rugó szabad végéhez erősített 0,5 kg tömegű test igen nagy amplitúdójú rezgést végez. Ezután megállunk egy pihenőben, és megállapítjuk, hogy egyensúlyi helyzetben a test 20 cm-rel nyújtja meg a rugót.

a) Mekkora periódusidővel rezeg a rugóra függesztett test a pihenőben, ha ott rezgésbe hozzuk?

b) Mekkora sebességgel haladtunk, amikor a rugó nagy amplitúdóval rezgett?

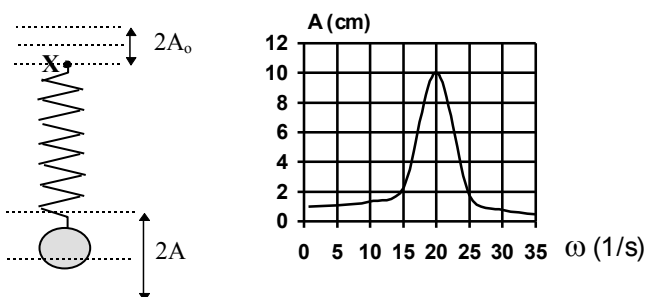
33.

Egy függőleges rugó alsó végére egy $m = 1 \text{ kg}$ tömegű testet függesztünk. A rugó felső végét (X-pont) ω körfrekvenciájú, A_0 amplitúdójú harmonikus rezgőmozgással felfelé mozgatjuk. Egy idő után a test is harmonikus rezgést végez, melynek amplitúdója A . Az X pontot különböző ω körfrekvenciákkal rezgettetve minden esetben megmérjük a test rezgésének amplitúdóját, és az összetartozó értékeket ábrázoljuk. Így kapjuk a mellékelt grafikont.

a) Határozzuk meg a rugó D rugóállandóját!

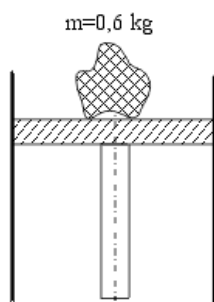
b) Mekkora A_0 amplitúdóval mozgattuk a rugó felső végét?

(A jelenség leírásánál a közegellenállás szerepe elhanyagolható.)



„Zörgés, megcsúszás”

34.



Egy függőleges tengelyű dugattyúra 0,6 kg tömegű testet helyeztünk. A dugattyú harmonikus rezgőmozgást végez, a rezgésidő 0,5 s.

- Legfeljebb mekkora lehet a rezgés amplitúdója, hogy a dugattyúra helyezett test állandóan a dugattyún maradjon? **(6,2 cm)**
- Ábrázoljuk ennél az amplitúdónál a test és a dugattyú közt ható erőt a dugattyú kitérésének függvényében az alsó holtpontról kiindulva a felső holtpontra érkezéséig!

Versenyfeladatok

35.

Egy rugót felfüggesztünk majd szabad végére egy testet rögzítünk. A test megnyújtja a rugót és egy bizonyos helyzetben egyensúlyba kerül. Ha a testet kimozdítjuk ezen egyensúlyi helyzetéből akkor harmonikus rezgést végez. Teljesül-e erre a mozgásra, hogy

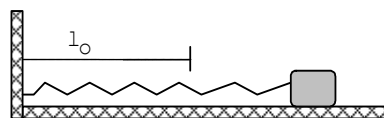
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dy^2 = \text{állandó}.$$

(m a test tömege, v a sebessége, y az egyensúlyi helyzettől mért kitérés, D a rugóállandó.)

- Nem, mert a magassági energiával is számolni kell.
- Igen.

36.

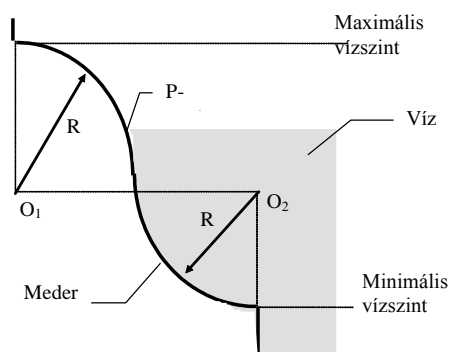
Egy l_0 hosszúságú, egyik végén rögzített vízszintes rugó másik végéhez egy m tömegű testet rögzítünk. A rugót megnyújtjuk, majd a testet elengedjük. A létrejövő mozgásnak tekintjük azt a szakaszt, amíg a test az ábrán balra mozog. A testre vízszintesen csak a rugóerő és a csúszási súrlódási erő hat. Harmonikus rezgést végez-e a test?



- Igen.
- Nem

37.

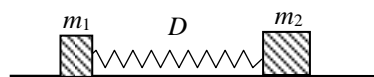
Egy tengerparton az árapály jelensége miatt a vízszint fel-le ingadozik. Az ingadozás jól közelíthető harmonikus rezgőmozgással, melynek periódusideje 12,5 óra. A meder keresztmetszete az ábrán látható: két $R=5$ m sugarú csatlakozó negyedkörív, melyek középpontjai azonos magasságban vannak. A vízszint az alsó negyedkörív alja és a felső negyedkörív teteje között ingadozik. Jelölje P a meder és a vízfelszín érintkezési pontját.



- Mekkora a vízszint ingadozás maximális sebessége?
- Határozza meg a P-pont sebességét a pont helyzetének függvényében!

38.

Egy D rugóállandójú húzó-nyomó rugó egyik végére m_1 , a másik végére m_2 tömegű testet erősítünk. A testeket fogva a rugót Δl -el megnyújtjuk, majd a testeket egyszerre elengedjük. Határozzuk meg

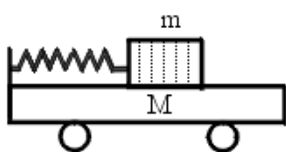


- a testek maximális sebességeit,
- a testek rezgési amplitúdóit,
- a kialakuló rezgés frekvenciáját!

A vízszintes talajon mozgó testek és a talaj közötti súrlódás elhanyagolható, $m_1 = 1$ kg, $m_2 =$

2 kg, $\Delta l = 9$ cm, $D = 100$ N/m.

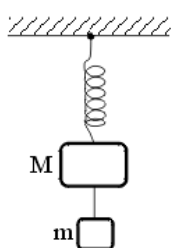
39.



Lefogott, 5 kg tömegű kocsin 2,5 kg tömegű testet 200 N/m rugóállandójú rugóval kötünk ki a kocsihoz. A rugót a kocsi hossz tengelyének irányában 0,2 m-rel kifeszítjük, majd a testet és a kocsit egyszerre elengedjük. A súrlódás elhanyagolható.

- a) Mekkora lesz a test, és mekkora a kocsi legnagyobb sebessége a talajhoz képest? **(1,46 m/s, 0,73 m/s;)**
 b) Az elengedés után mennyi idő múlva érik el a legnagyobb sebességüket? **(0,14 s)**

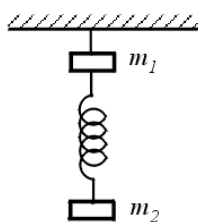
40.



Az ábrán látható rugóra függesztett testek tömege: $M=0,3$ kg valamint $m=0,1$ kg. A rugóállandó 20 N/m. A két testet vékony cérnaszál köti össze.

- a) Mekkora és milyen irányú gyorsulással indulnak el a testek, ha a cérnaszálát elvágjuk? **(9,81 m/s², 3,27 m/s²)**
 b) Mekkora lesz a rugó legkisebb megnyúlása a cérna elvágása után? **(9,81 cm)**

41.



Két azonos ($m_1 = m_2 = 5$ kg) tömegű testet 250 N/m rugóállandójú csavarrugó köt össze. A felső testet fonállal függesztjük fel az ábra szerint. A testek kezdetben nyugalomban vannak.

- a) Mekkora gyorsulással indulnak el az egyes testek a fonal elvágása után? **(2g; 0)**
 b) Mekkora a szabadon eső rendszer rezgésének periódusideje? **(0,63 s)**
 c) Mekkora az egyes testek sebessége egy fél periódusidővel a fonal elvágása után? **(3 m/s, 3 m/s)**

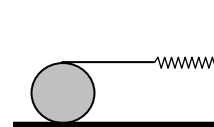
42.

Egy m tömegű tömör hengerre fonalat csavarunk és azt egy D dugóállandójú rugó közbeiktatásával falhoz rögzítjük. A hengert olyan helyzetben engedjük el, amikor a rugó megnyúlása Δl . A henger a talajon tisztán gördülve mozog.

- a) Mekkora lesz a henger tömegközéppontjának maximális sebessége?

- b) Mennyi idő alatt lazul meg a fonál?

($m = 1$ kg, $D = 150$ N/m, $\Delta l = 0,2$ m.)



43.

Vízszintes, súrlódásmentes talajon egy $m = 1$ kg tömegű test nyugszik. Oldalához (A pont) egy vékony, elhanyagolható tömegű gumiszálát rögzítettünk. A szál nyújtatlan hossza $L_0 = 50$ cm.

Kezdetben a szál másik vége (B pont) az A ponttól vízszintes irányban L_0 távolságra van. A gumiszál megnyúlásakor $D = 100$ N/m direkciós erejű rugóként viselkedik, "összenyomódásra" pedig képtelen, meglazul, ekkor nem fejt ki erőt.

Valamely pillanatban a gumiszál B végét $v_0 = 1$ m/s állandó sebességgel húzni kezdjük vízszintesen (az ábrán) jobbra mutató irányba és ezt a mozgást folyamatosan fenn is tartjuk.

- a) A létrejövő mozgás során mekkora lesz a legnagyobb távolság az A és B pontok között?
 b) Mennyi idő múlva éri utol az A pont a B pontot?

